1 Principios de la Adición y la Multiplicación

Supongamos que este sábado queremos ir al cine, o al teatro, pero no ambas cosas a la vez. Si se exhiben 12 películas y 8 obras de teatro ¿cuántas posibilidades o decisiones tenemos?

Podremos elegir una de las 12 películas o una de las 8 obras de teatro; en total tendremos 12+8=20 posibilidades.

Este ejemplo ilustra nuestro primer principio de conteo.

1.1 *Principio de la Adición (o Regla de la suma)*

*Si una tarea o acción puede realizarse de **m** formas diferentes, y otra tarea o acción puede realizarse de **n** formas diferentes, pero de modo que no es posible realizarlas simultáneamente, entonces, tendremos **m+n** formas diferentes de realizar una de ellas.*

El enunciado anterior se puede generalizar de la siguiente forma:

Si disponemos de n acciones o tareas, y cada una de ellas puede realizarse respectivamente de $a_1, a_2, \ldots . a_n$ formas diferentes, para llevar a cabo una sola cualquiera de ellas tendremos $\sum_{1}^{n} a_i$ formas distintas.

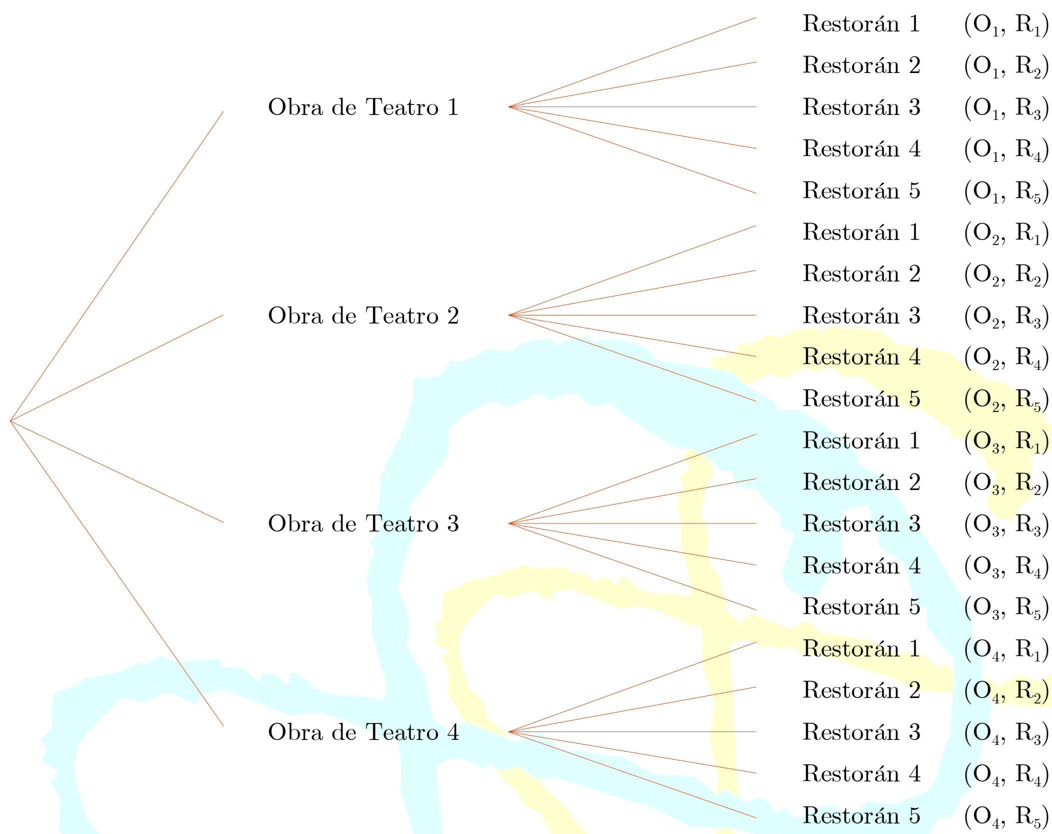
★ **Ejemplo 2**

Supongamos que este sábado queremos ir al teatro y luego a cenar. Si se exhiben 4 obras de teatro y hay 5 restoranes ¿cuántas posibilidades de elección tenemos?

Tenemos 4 posibilidades de elegir una obra de teatro y por cada una de ellas tenemos 5 posibilidades de elegir un restorán.

Tendremos entonces, $4 \cdot 5 = 20$ posibilidades de ir al teatro y luego cenar.

Este tipo de problemas puede visualizarse mediante un **Diagrama de Árbol.** Los diagramas de árbol son muy útiles para resolver o analizar algunos tipos de problemas de conteo. La figura a continuación muestra el diagrama de árbol correspondiente al ejemplo anterior:



Es fácilmente observable que en los extremos de las últimas ramas tenemos todos los casos posibles, por lo cual es muy sencillo contarlos.

El ejemplo anterior muestra lo que llamaremos segundo principio de conteo:

1.2 *Principio de la Multiplicación (o Regla del producto)*

Si un procedimiento o actividad puede descomponerse en las etapas primera y segunda, y existen ***m*** *resultados posibles para la primera etapa y si, para cada uno de estos resultados, existen* ***n*** *resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total puede realizarse, en el orden dado, de* ***m·n*** *formas.*

El enunciado anterior se puede generalizar fácilmente para los casos en que se consideren tres o más descomposiciones.

1.3 *Arreglos simples y con repetición*

Para extraer dinero de un cajero automático, uno de los pasos que debemos seguir es introducir una clave de cuatro dígitos ¿cuántas claves distintas son posibles?

Son sin duda claves distintas 6348, 5721 y 5723. También son claves distintas 3051 y 0351, y aquellas que tengan dígitos repetidos, por ej. 4888 y 3311.

Aplicaremos el principio de la multiplicación para calcular el número de posibles claves distintas.

Tenemos 4 posiciones para colocar los números. En la primera posición podemos colocar cualquiera de los 10 dígitos y por cada uno podemos colocar 10 dígitos en la segunda posición, razonando análogamente para las 3ª y 4ª posiciones se tiene:

$$\underbrace{10}_{1^{a}\text{ posición}} \cdot \underbrace{10}_{2\text{ posición}} \cdot \underbrace{10}_{3^{a}\text{ posición}} \cdot \underbrace{10}_{4\text{ posición}} = 10^4$$

Por lo tanto son posibles 10^4 o 10.000 claves distintas. Diremos que estas claves son los arreglos con repetición de orden 4 obtenidos a partir del conjunto de los dígitos, $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

★ **Ejemplo**

En un grupo de 10 estudiantes, se escogerá a tres y se les sentará en fila para obtener una foto. ¿Cuántas disposiciones lineales distintas son posibles?

Nombremos con las letras A, B, C,..., I, J a los 10 estudiantes, una disposición posible de 3 de ellos puede ser BCE, BEC, ABD. Es una situación parecida a la del ejemplo 1. La diferencia radica en que no es posible la repetición. Aplicando nuevamente el principio de multiplicación: para la primera posición tenemos10 estudiantes posibles, definido éste para la segunda nos quedan 9 estudiantes posibles; y 8 para la tercera posición. Por lo tanto el número de disposiciones es: 10·9·8=720

A estas disposiciones las llamaremos arreglos sin repetición de los 10 elementos del grupo de orden 3, o tomados de a 3.

★ **Definición**

Dado un conjunto $M = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\}$ *con* $\boldsymbol{m}$ *elementos, llamaremos arreglos de orden* $\boldsymbol{n}$ *(o tamaño* $\boldsymbol{n}$*) e índice* $\boldsymbol{m}$ *a las n-uplas* $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ *cuyas componentes pertenecen al conjunto M.*

Distinguiremos dos tipos de arreglos: aquellos que pueden tener componentes repetidas, que llamaremos arreglos con repetición (o con elementos repetidos) y aquellos que no tienen componentes repetidas, que llamaremos arreglos sin repetición (o sin elementos repetidos). A los arreglos sin repetición también se los llama arreglos simples; a pesar de esto es usual que se explicite cuando un arreglo es con repetición y se nombre a los arreglos simples sólo como arreglos.

Observemos que en el caso de los arreglos con repetición el orden (n) puede ser mayor que el cardinal del conjunto $M\,(m)$, en cambio en los arreglos simples esto no es posible.

Para arreglos con repetición: $n > m \quad \vee \quad n = m \quad \vee \quad n < m$

Para arreglos simples: $n \leq m$

★ **Número de arreglos**

Dado un conjunto M de $\boldsymbol{m}$ *elementos* $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\}$ *se pueden obtener:*

❖ $m(m-1)(m-2)(m-3)\cdot\cdots\cdot(m-n+2)(m-n+1)$ *arreglos sin repetición.*

❖ m^n *arreglos con repetición.*

Notación: Indicaremos el número de arreglos sin repetición A_n^m y a al número de arreglos con repetición $A_n'^m$.

Para obtener una fórmula de cálculo para el número de arreglos, definiremos primero algunos conceptos previos:

★ **Factorial de un número natural**

Llamaremos factorial de $n \in \mathbb{N}$, al número $n!$ que cumple: $n! = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ n(n-1)! \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 5! &= 5\cdot 4! \\ 5! &= 5\cdot 4\cdot 3! \\ 5! &= 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2! \\ 5! &= 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1! \\ 5! &= 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0! \\ 5! &= 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto 5!=120

De acuerdo con lo anterior generalizamos: $n! = n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ si $n \geq 1$.

★ **Expresión factorial del número de arreglos simples**

Coma ya sabemos, el número de arreglos se puede expresar como

$$A_n^m = m(m-1)(m-2)(m-3)\cdot\cdots\cdot(m-n+2)(m-n+1)$$

Si multiplicamos y dividimos por $(m-n)!$ el segundo miembro de la igualdad anterior resulta:

$$A_n^m = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\cdot\cdots\cdot(m-n+2)(m-n+1)\cdot(m-n)!}{(m-n)!}$$

Como $(m-n)! = (m-n)\cdot(m-n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, entonces tenemos que

$$A_n^m = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)(m-n+1)\cdot(m-n)\cdot(m-n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(m-n)!}$$

Podemos observar ahora que el numerador del segundo miembro de la igualdad es igual a $m!$, por lo tanto: $\boxed{A_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)!}}$

1.4 *Permutaciones*

Se quieren colocar juntos, en una repisa un libro de física, uno de biología, uno de matemática y uno de química, ¿de cuántas maneras es posible hacerlo?

Se puede analizar este ejemplo como un caso particular de los arreglos simples vistos anteriormente. La particularidad está en que el número de elementos del conjunto y el orden coinciden $(n = m)$.

Lo calcularemos entonces como $A_4^4 = \dfrac{4!}{0!} = 4! = 24$

★ **Definición**

Llamaremos permutaciones de orden ***m*** *a los arreglos simples de m elementos de orden m.*

★ **Número de permutaciones**

Aplicando las fórmulas de cálculo de arreglos podemos decir que:

$$P_m = A_m^m = \frac{m!}{0!} = m! \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_m = m!}$$

1.5 *Permutaciones con repetición*

Consideremos el siguiente problema ¿Cuántas palabras se pueden formar con todas las letras de la palabra VERDE? Es decir, cuántas permutaciones de orden cinco se pueden formar con las letras de la palabra VERDE.

Observemos que el número no puede ser 5!=120, pues la letra E está repetida. En ese caso el cálculo consideraría como distintas las permutaciones VE_1RDE_2 y VE_2RDE_1, pero son en realidad la misma palabra.

★ **Definición**

Sea A *la n-upla* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *en la que admitimos que pueda haber componentes repetidas.*

Llamaremos <u>*permutaciones con repetición*</u> *a todas las n-uplas que se pueden formar intercambiando las componentes de* A.[1]

[1] Vale la pena aclarar que cuando hablamos de ARREGLOS CON REPETICIÓN, nos referimos a que los elementos de un conjunto inicial (que como tal, no tiene elementos repetidos) pueden elegirse más de

Volvamos al ejemplo anterior.

Es posible obtener las 120 permutaciones de VE_1RDE_2 considerando E_1 y E_2 como distintas, del siguiente modo:

VE_1RDE_2	E_1VRE_2D	VE_1RE_2D	E_1VE_2RD	VRE_1DE_2	el resto lo completa la imaginación del lector
VE_2RDE_1	E_2VRE_1D	VE_2RE_1D	E_2VE_1RD	VRE_2DE_1	el resto lo completa la imaginación del lector

Las letras E_1 y E_2 aparecen permutadas en cada columna respectiva del cuadro, pero VE_1RDE_2 y VE_2RDE_1 son la misma palabra; en realidad en cada columna hay una misma palabra. Las 120 permutaciones iniciales están distribuidas en un cuadro de 60 columnas y 2 filas, por lo que el número de palabras distintas será 60. En este caso: $60 = \dfrac{5!}{2!}$

★ **Ejemplo**

¿Cuántas palabras se pueden formar permutando todas las letras de la palabra ARRIERO?

Usando la misma técnica que en el caso anterior se pude verificar que el número de filas será el correspondiente a las permutaciones de R_1, R_2, y R_3, serán $3!$ filas, por lo tanto el número de palabras será: $\dfrac{7!}{3!}$

★ **Ejemplo**

¿Cuántas palabras se pueden formar permutando todas las letras de la palabra TRIRREME? Lo calcularemos aplicando la misma técnica que en los casos anteriores, pero al organizar un cuadro con $TR_1IR_2R_3E_1ME_2$, el número de filas (por el principio de la

---

una vez para formar los arreglos. Sin embargo, en las PERMUTACIONES CON REPETICIÓN se considera que el "conjunto" inicial YA TIENE elementos repetidos, y por eso lo llamamos n-upla.

Es correcto interpretar las permutaciones simples como un caso particular de los arreglos simples, pero NO es correcto pensar que las permutaciones con repetición sean un caso particular de los arreglos con repetición.

multiplicación) será 3!·2!, pues por cada permutación de las R tendremos $2!$ permutaciones de las E. Por lo tanto, el número de palabras será: $\dfrac{8!}{2!3!}$

Los ejemplos anteriores permiten obtener la siguiente fórmula para el cálculo del número de permutaciones con repetición:

El número de permutaciones con repetición de orden **m** *, que tiene* **r** *elementos* a_1*,* **s** *elementos* a_2*, ... ,* **k** *elementos* a_m*, donde* $r+s+\cdots+k=m$ *es:* $\dfrac{m!}{r!\cdot s!\cdot\ldots\cdot k!}$.

Notaremos: $\boxed{P_m^{r,s,..k}=\dfrac{m!}{r!\cdot s!\cdot\ldots\cdot k!}}$

Es habitual usar esta notación aún en el caso en que $r+s+\ldots+k<m$, asumiendo que los restantes elementos no se repiten, ya que esto no afecta el resultado del cálculo.

★ **Ejemplos**

En el caso de la palabra VERDE el número de permutaciones con repetición será $P_5^2=\dfrac{5!}{2!}=60$. Para la palabra ARRIERO el número es $P_7^3=\dfrac{7!}{3!}=840$, y para TRIRREME $P_8^{2,3}=\dfrac{8!}{2!\cdot 3!}=3360$.

1.6 *Combinaciones*

En problemas de conteo como los que hemos trabajado hasta el momento una diferencia en el orden genera un resultado distinto.

Veamos ahora el siguiente ejemplo:

Si de un grupo de cinco enfermeros Juan, Ana, Rodrigo, Gabriela y Pedro, se quieren elegir tres para hacer guardias nocturnas ¿cuántas guardias distintas se pueden formar?

Consideremos el conjunto $M=\{J,A,R,G,P\}$ de los enfermeros disponibles. Algunas de las ternas que se pueden formar con tres elementos de M son *JAR, JAG, JAP, JRG, JRP, JPG, ARJ, JRA,...* Notemos que en este caso la guardia que se obtiene de la terna JAR es la misma que se obtiene de la terna ARJ. El orden de los integrantes de una guardia no es relevante para el problema; por lo tanto el número de ternas que se pueden formar no es lo mismo que el número de guardias que se pueden formas. Debemos contar entonces los posibles subconjuntos a formar con los elementos de M y no las posibles ternas. Se formaron 60 ternas, pero sólo podrán formarse 10 guardias. Cada una de esas guardias es un subconjunto de tres enfermeros tomados del conjunto M de cinco enfermeros. A esos subconjuntos los llamaremos *combinaciones*.

En este ejemplo, $\{J,\ A,\ R\}$ es una combinación de orden 3 de los elementos del conjunto M .

★ Definición de Combinaciones

*Dado un conjunto $M=\left\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\right\}$ con **m** elementos, llamaremos combinaciones de orden **n** (o tamaño **n**) a los subconjuntos de **n** elementos que se pueden formar con los elementos del conjunto M.*

★ Cálculo del número de combinaciones

Consideremos el conjunto $M=\left\{A,B,C,D\right\}$, y en la primera columna de un cuadro, anotaremos los subconjuntos de tres elementos, y en cada fila las permutaciones de cada combinación respectivamente.

ABC	ACB	CAB	CBA	BAC	BCA
ABD	ADB	DAB	DBA	BAD	BDA
ACD	ADC	ADC	ACD	CAD	CDA
BCD	BDC	DBC	DCB	CDB	CBD

Obsérvese que en el cuadro tenemos todos los arreglos sin repetición de orden 3, tomados del conjunto M. Asimismo, el número de filas es el de las combinaciones de 4 elementos de orden 3, mientras que el número de columnas es el de las permutaciones de 3 elementos. Por lo tanto:

$$A_3^4=(\text{N}^\text{o}\text{ de combinaciones})\cdot P_3 \quad \text{o sea} \quad \frac{4!}{(4-3)!}=(\text{N}^\text{o}\text{ de combinaciones})\cdot 3! \quad \text{entonces:}$$

$$\text{N}^\text{o}\text{ de combinaciones}=\frac{4!}{1!3!}=4$$

Al número de combinaciones de orden $\boldsymbol{n}$ tomadas de un conjunto de $\boldsymbol{m}$ elementos lo anotaremos C_n^m. En muchas publicaciones internacionales es habitual que figuren los números combinatorios expresados como $C(m,n)$ o también simplemente $\binom{m}{n}$.

Generalizando a partir del ejemplo anterior, la fórmula para el cálculo del número de combinaciones es $\boxed{C_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)!\,n!}}$

1.7 *Combinaciones con repetición*

Se hace una orden telefónica a una pizzería para solicitar el envío de 5 pizzas, que se eligen de las 3 opciones que ofrece: jamón, aceitunas, y palmitos. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerse el pedido?

Llamemos J, A y P a las pizzas de jamón, aceitunas y palmitos respectivamente. Para resolver este problema nos interesa cuántas pizzas de cada sabor se encargan, y no el orden en que se encargan, por lo que nos enfrentamos a un caso de combinaciones con repetición. En este caso, elegimos 5 objetos de 3 disponibles.

Para obtener una fórmula de cálculo para el número de combinaciones con repetición, representaremos algunos ejemplos de selección de las pizzas de dos maneras diferentes. Primero aclaremos que, si bien el orden de elección no incide en el resultado, para las representaciones fijaremos un orden constante.

Estas son algunas de las posibles órdenes de 5 pizzas que podemos hacer:

J J J A P	x x x | x | x
J J A A P	x x | x x | x
J P P P P	x | | x x x x
J J J A A	x x x | x x |
J J J J J	x x x x x | |
A A A A A	| x x x x x |

En ambas columnas hemos representado las diferentes compras que se pueden hacer. Veamos que en la segunda columna cada cruz (x) representa una pizza encargada, mientras que las plecas (|) dividen las cruces de acuerdo al sabor: a la izquierda de la primera pleca figuran las pizzas con jamón, entre las dos plecas las pizzas con aceitunas, y a la derecha de la segunda pleca las pizzas con palmitos.

Asumiendo que son dos formas equivalentes de representar las mismas combinaciones con repetición, buscaremos la forma de contar los elementos de la segunda columna.

Allí tenemos secuencias de 7 símbolos, 5 cruces y 2 plecas. Podemos calcular entonces todas estas combinaciones contando de cuántas maneras es posible colocar las 5 cruces en los 7 lugares disponibles, es decir, $C_5^7 = 21$. Habrá 21 pedidos diferentes que podemos hacer a la pizzería.

Reinterpretando este método de cálculo, vemos que el índice 5 corresponde a la cantidad elementos que elegiremos (pizzas) del problema inicial, y el índice 7 corresponde a la suma de elementos a elegir (5) más las separaciones (2: uno menos que la cantidad de elementos disponibles).

Generalizando, si anotamos C'^{m}_{n} al número de combinaciones con repetición de un conjunto de m elementos tomados de a n, tendremos:

$$\boxed{C'^{m}_{n} = C_n^{m+n-1}}$$

★ **Ejemplos**

¿De cuántas maneras es posible distribuir 10 objetos iguales en tres cajas distintas, aceptando que puedan quedar cajas vacías? En este ejemplo interpretamos que, al distribuir los objetos, estaremos eligiendo diez veces en qué caja colocar un objeto; no nos interesa en qué orden los vamos distribuyendo, sino el número final del objetos que habrá en cada caso. Tendremos entonces C'^{3}_{10} formas de repartir los 10 objetos en 3 cajas, es decir, $C_{10}^{12} = 66$.

¿Cuántas elementos tiene el conjunto solución de la ecuación $x + y + z = 10$, con $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{N}$? Veamos que la suma 10 implica que disponemos de 10 unidades para "repartir" entre las tres incógnitas. Podemos asociarlo al ejemplo anterior, y sería necesario realizar el mismo cálculo. Notemos que esta similitud también está dada por que las cajas son 'distintas', y en este caso también las incógnitas son diferentes (porque no es lo mismo la solución $(x,y,z)=(5,5,0)$ que $(x,y,z)=(5,0,5)$). Por tanto, el número de soluciones de la ecuación será también $C'^{3}_{10}=66$.

2 Definiciones por recurrencia

En esta sección aprovecharemos los conceptos recientemente tratados para ejemplificar un modelo de definición diferente: las definiciones por recurrencia.

Para definir un cierto concepto (llamémosle $E(n)$), que depende del natural n, se define primero $E(k)$ en forma nominal explícita (siendo k un cierto número natural), y luego se indica un procedimiento para construir $E(n+1)$ a partir de $E(n)$ cualquiera sea el número natural n.

★ **Ejemplo**

Como ya hemos visto, es posible definir por recurrencia el factorial de un número natural, $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{Si } n=0 \Rightarrow n!=1$$
$$\text{Si } n\geq 1 \Rightarrow n!=n(n-1)!$$

2.1 *Determinación por recurrencia del número de arreglos*

Dado el conjunto $P=\{a,b,c,d,e\}$, escribe los arreglos de orden 2 de los elementos de P.

Construye ahora los arreglos de los elementos de P de orden 3 utilizando los arreglos anteriormente formados.

¿Cuál es la relación entre el número de arreglos de orden 3 y el número de arreglos de orden 2 de los elementos de P?

Completa: $A_3^5 = A_2^5 \cdot$ ....

Vamos a generalizarlo:

Sea $P = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, coloquemos en una columna los arreglos de orden s. Luego completa las filas del cuadro de la derecha con arreglos de orden $s+1$ tales que todos los arreglos de una misma fila tengan en común los primeros s elementos. Por ejemplo, en la primera fila se escribirán los arreglos de orden $s+1$ que tengan como primeros s elementos $a_1a_2\dots a_s$.

$a_1a_2\dots a_s$	$a_1a_2\dots a_sa_{s+1}$		$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

¿Todos los componentes del cuadro de la derecha son arreglos de orden $s+1$?

Dos elementos ubicados en distinto lugar del cuadro, ¿son arreglos distintos? (Sugerencia: considera dos elementos en distintas filas y luego dos en la misma fila).

¿Puedes asegurar que en el cuadro de la derecha están todos los arreglos de los elementos de P de orden $s+1$? (Sugerencia: explica el método que te permitiría encontrar en el cuadro un arreglo cualquiera dado).

A partir de de la formación del cuadro, y de lo demostrado ¿qué conclusión puedes obtener?

Completa $A^n_{s+1} =$ ....

Observemos que para poder realizar la definición por recurrencia del número de arreglos es necesario establecer el caso base. (Calcula A^n_0 a partir de la definición de arreglos).

Ahora puedes completar:

$$\begin{cases} A^n_0 = \text{.......................................} \\ A^m_{s+1} = \text{..} \end{cases}$$

2.2 *Cálculo de números combinatorios por recurrencia*

La definición por recurrencia para el número de combinaciones es:

$$\begin{cases} C_0^m = 1 \\ C_{s+1}^m = \dfrac{C_s^m \left(m-s\right)}{\left(s+1\right)} \end{cases}$$

En forma similar a la trabajada con arreglos, indique cuál es el procedimiento de formación que esta fórmula representa.

3 Propiedades de los números combinatorios

3.1 *Combinaciones complementarias*

Laura realizará un postgrado en Educación Matemática; en el primer año debe cursar 6 materias (a, b, c, d, e, f), dos en el primer semestre y cuatro en el segundo.

Escribe en una columna todas las maneras en que puedes elegir las dos materias del primer semestre. ¿Qué representan? ¿Cuántas son?

Elije una de las opciones para el primer semestre, y escribe las materias que cursará en el segundo semestre en ese caso. ¿Qué representa? Escribe para cada opción del primer semestre la/s que corresponde/n en el segundo semestre. ¿Qué representan?

¿Qué observas del número de opciones para elegir las materias del primer y segundo semestre? Escríbelos como números combinatorios y generaliza esta situación.

Justifica la generalización anterior.

★ **Definición de combinaciones complementarias**

3.2 *Fórmula de Stifel*

José integra un equipo de 5 personas que deciden formar una comisión de tres para organizar una reunión a fin de año.

Escribe todas las comisiones posibles… ¿Cuántas son? Exprésalo como número combinatorio.

Ahora, José quiere saber en cuántas de las posibles comisiones él formará parte y en cuántas no; calcúlalas e indícalas entre las anteriores.

¿Qué relación puedes establecer entre el conjunto original y sus dos subconjuntos? ¿Y entre sus cardinales?

Generaliza esta situación y justifícala.

3.3 *Binomio de Newton*

Completa las siguientes igualdades:

$(a+b)^0 =$ ....

$(a+b)^1 =$ ....

$(a+b)^2 =$ ....

$(a+b)^3 =$ ....

Consideramos ahora solamente los coeficientes de los desarrollos anteriores:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

....

....

....

Completa los puntos suspensivos en el “triángulo numérico” anterior.

Ahora, utilizando lo anterior desarrolla:

$(a+b)^6 =$ ....

Para hallar $(a+b)^{20}$, ¿cómo procederías?

Vamos a buscar una manera efectiva de determinar esos coeficientes. Para ello reinterpretaremos los números del triángulo como números combinatorios.

$$C_0^0$$

$$C_0^1 \quad C_1^1$$

$$C_0^2 \quad C_1^2 \quad C_2^2$$

....

....

....

....

¿Cómo puedes justificar la relación entre los números combinatorios anteriores?

El triángulo anterior recibe el nombre de triángulo de Tartaglia ("el Tarta").

También se le llama triángulo de Newton, o de Pascal.

Generalizando todo lo visto puede decirse que:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_0^n C_i^n a^{n-i} b^i}$$

Demuestra que esta igualdad se cumple para todo natural.

★ Aplicación

Hallar cuál es el número de subconjunto posibles de un conjunto de n elementos.

4 Principio del palomar[2]

Si se encuentran reunidas 13 personas… ¿podemos afirmar que al menos dos de ellas cumplen años en el mismo mes? La respuesta parece obvia: será posible que 12 de ellas cumplan años en meses diferentes, pero la treceava deberá, necesariamente, "repetir" alguno de los meses.

Este razonamiento tan simple, se conoce como **principio del palomar,** que puede enunciarse de la siguiente manera:

Si m palomas ocupan n nidos, y $m > n$, entonces al menos un nido tiene dos o más palomas descansando en él.

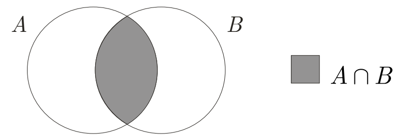
4.1 *Ejemplos*

- En un cajón hay 8 pares de medias desordenadas. ¿Cuántas de ellas es necesario sacar para asegurarse de formar un par correcto? Tendremos que sacar 9 medias. (Podemos interpretar las 16 medias como 16 palomas, y los 8 pares como los 8 nidos).
- Cualquier subconjunto de 6 elementos del conjunto $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10. Pensemos en 5 nidos, correspondientes a los conjuntos $\{1,9\}$, $\{2,8\}$, $\{3,7\}$, $\{4,6\}$ y $\{5\}$. Elegir 6 elementos del conjunto S equivale a seleccionar 6 elementos distintos (palomas) de estos 5 nidos. Necesariamente, serán elegidos dos elementos de un mismo nido, garantizando una pareja de números cuya suma sea 10.
- Dada una función $f : A \to B$, con $\# A > \# B$, es imposible que f sea inyectiva. Interpretamos los elementos de A como las palomas, que por medio de la función f se ven asignadas a sus nidos (los elementos de B); necesariamente habrá dos palomas en un mismo nido, es decir, dos elementos del dominio con la misa imagen, por lo cual la función no puede ser inyectiva.

[2] También es conocido como *Principio de las cajas*, o de Dirichlet.

5 Principio de inclusión-exclusión.

Este principio nos permite contar los elementos de una unión de conjuntos, no necesariamente disjuntos.



Veamos que si tenemos dos conjuntos A y B:

$$\#(A \cup B) = \# A + \# B - \#(A \cap B)$$

Es decir, que para calcular el cardinal de una unión de conjuntos, a la suma de los cardinales es preciso restarle el cardinal de la intersección, ya que los elementos comunes fueron contados dos veces (una vez en cada conjunto).

Si tenemos tres conjuntos, ¿cómo calcularemos $\#(A \cup B \cup C)$? Como ejercicio, deduce una expresión para ello ayudándote por un esquema con diagramas de Venn.

$\#(A \cup B \cup C) =$

Este razonamiento puede generalizarse para n conjuntos, alternando el sumar o restar los cardinales de las intersecciones como en los ejemplos anteriores.

En general, buscando una expresión para el cardinal de la unión de n conjuntos A_i, si llamamos α_i a la suma de los cardinales de todas las intersecciones de i conjuntos de los n iniciales, tendremos que:

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - ... + (-1)^{n+1}\alpha_n$$

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\alpha_j$$

Para comprenderlo mejor veamos algunos ejemplos.

5.1 *Ejemplos*

- En un examen compuesto por una prueba escrita y una entrevista, 16 personas aprobaron la prueba escrita, 21 aprobaron la entrevista, y 13 aprobaron ambas. ¿Cuántas personas se presentaron el examen? Ya hemos resuelto alguno problemas de este tipo representando los cardinales en diagramas de Venn, pero para ejemplificar el uso del principio de inclusión-exclusión tomaremos: $\# A = 16$, $\# B = 21$ y $\#(A \cap B) = 13$, de lo que se deduce que $\#(A \cup B) = 16 + 21 - 13 = 24$.

- Calcularemos ahora cuántos enteros hay comprendidos entre 1 y 1000 que sean múltiplos de 2, 3 o 5.

Para simplificar la notación, definimos los conjuntos A_p, $p \in \mathbb{N}$ tales que $A_p = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000, x = \dot{p}\right\}$. En particular tenemos

$$A_2 = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000 \wedge x = \dot{2}\right\}$$

$$A_3 = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000 \wedge x = \dot{3}\right\}$$

$$A_5 = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000 \wedge x = \dot{5}\right\}$$

Nuestro interés es calcular $\#(A_2 \cup A_3 \cup A_5)$.

Para ello, observemos que en general, la cantidad de múltiplos de p que hay entre 1 y 1000 se puede calcular como $\left[\frac{1000}{p}\right]$, siendo $[y]$ la parte entera del real y. De otro modo, $\# A_p = \left[\frac{1000}{p}\right]$.

Por tal motivo: $\# A_2 = \left[\frac{1000}{2}\right] = 500$; $\# A_3 = \left[\frac{1000}{3}\right] = 333$, $\# A_5 = \left[\frac{1000}{5}\right] = 200$. De esto se deduce que $\alpha_1 = 500 + 333 + 200 = 1033$.

Ahora, $\#(A_2 \cap A_3) = \# A_6 = \left[\frac{1000}{6}\right] = 166$, $\#(A_2 \cap A_5) = \# A_{10} = \left[\frac{1000}{10}\right] = 100$, y $\#(A_3 \cap A_5) = \# A_{15} = \left[\frac{1000}{15}\right] = 66$. Por lo tanto: $\alpha_2 = 166 + 100 + 66 = 332$.

Finalmente, $\#(A_2 \cap A_3 \cap A_5) = \# A_{30} = \left[\frac{1000}{30}\right] = 33$, así que $\alpha_3 = 33$.

Ahora podemos calcular: $\#(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 1033 - 332 + 33 = 734$.

Concluimos que hay 734 enteros entre 1 y 1000 que son múltiplos de 2, 3 o 5.

6 Números de Stirling de segunda especie

Consideremos el conjunto $A=\{a,b,c,d\}$. ¿De cuántas maneras distintas es posible particionar el conjunto A en dos subconjuntos (no vacíos)?

Tenemos dos opciones: dividirlo en dos conjuntos con dos elementos cada uno, o en un conjunto de tres elementos y otro unitario.

Las particiones en conjuntos de dos elementos son 3: $P_1=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$, $P_2=\{\{a,c\},\{b,d\}\}$, $P_3=\{\{a,d\},\{b,c\}\}$, mientras que las particiones en un conjunto unitario y otro de tres elementos, son 4: $P_4=\{\{a\},\{b,c,d\}\}$, $P_5=\{\{b\},\{a,c,d\}\}$, $P_6=\{\{c\},\{a,b,d\}\}$ y $P_7=\{\{d\},\{a,b,c\}\}$. Es decir que, en total, el conjunto A puede particionarse de 7 maneras distintas en dos subconjuntos.

A este número lo llamaremos *número de Stirling de segunda especie* para un conjunto de 4 elementos dividido en 2 partes, y lo notamos: $S(4,2)=7$

Nuevamente, si deseamos calcular $S(4,3)$ podemos interpretarlo como el número de particiones de 3 subconjuntos que pueden hacerse del conjunto $A=\{a,b,c,d\}$. En este caso, resultarán indefectiblemente dos conjuntos unitarios y un conjunto con dos elementos en cada partición posible. Entonces bastará contar todas las parejas que pueden formarse con los elementos de A, en este caso, $C_2^4=6$. Por lo tanto, $S(4,3)=6$.

En general, definimos el **número de Stirling de segunda especie** $S(n,k)$ como el número de particiones de un conjunto de n elementos en k partes $(n \geq k \geq 1)$.

Para poder generar una fórmula de recurrencia que permita calcular $S(n,k)$, calcularemos ahora $S(5,3)$ teniendo en cuenta que $S(4,2)=7$ y $S(4,3)=6$.

Notemos que si quisiéramos construir todas las particiones del conjunto $B=\{a,b,c,d,e\}$ (de 5 elementos) en 3 partes, podemos aprovechar las particiones que ya tenemos del conjunto $A=\{a,b,c,d\}$ y aprovechar que $B=A\cup\{e\}$.

Una opción es tomar las particiones de A en 2 partes, y agregar la parte $\{e\}$ en tercer lugar. Por ejemplo, la partición $P_A=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ genera la nueva partición $P_B=\{\{a,b\},\{c,d\},\{e\}\}$. En este caso, ya tenemos 7 particiones de B, porque $S(4,2)=7$.

La otra opción es tomar las particiones de A en 3 partes, y agregar el elemento e, que podrá unirse a cada conjunto de cada partición de A. Así pues, si tomamos $P'_A = \{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$ podremos generar tres nuevas particiones de B (una por cada elemento de P'_A), a saber: $P'_{B_1} = \{\{a,e\},\{b\},\{c,d\}\}$, $P'_{B_2} = \{\{a\},\{b,e\},\{c,d\}\}$, $P'_{B_3} = \{\{a\},\{b\},\{c,d,e\}\}$. De esta manera, obtenemos 3 particiones de B por cada una de las 6 particiones de A en tres partes: $3 \cdot S(4,3) = 3 \cdot 6 = 18$.

Sumando las posibilidades, tenemos que $S(5,3) = S(4,2) + 3 \cdot S(4,3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25$. Hay 25 formas se particionar un conjunto de 5 elementos en 3 partes.

Generalizando: $$\begin{cases} S(n,1) = 1, \ \ n \in \mathbb{N}^* \\ S(n,n) = 1, \ \ n \in \mathbb{N}^* \\ S(m,n) = S(m-1,n-1) + n \cdot S(m-1,n), \ \ m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*, m > n \end{cases}$$

Ejercicios

a) Utiliza la fórmula anterior para calcular $S(5,4)$

b) Completar el siguiente *triángulo de Stirling*, para $S(m,n)$:

$S(m,n)$		$n=$ 1	2	3	4	5	6
$m=$	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

6.1 *Ejemplos*

- ¿De cuántas maneras se pueden repartir 6 objetos en 3 cajas indistinguibles, sin que ninguna quede vacía? Podrá hacerse de $S(6,3)=90$ maneras diferentes.
- Un grupo de trabajo de 6 personas debe dividirse en tres, pues le serán asignadas algunas tareas. En principio, podremos decir que habrá (al igual que en el ejemplo anterior) $S(6,3)=90$ maneras de dividir el grupo. Pero si suponemos de antemano que las tres tareas (A, B, C) son conocidas, no será lo mismo que a un subgrupo le corresponda una tarea u otra. Volviendo al ejemplo anterior, tendríamos un caso en que las cajas se pueden distinguir una de otra. Ahora, para cada una de las 90 distribuciones se podrá permutar qué tarea le toca a cada equipo, en total de $3!=6$ maneras diferentes. Por lo tanto, las tres comisiones podrán conformarse de $3!\cdot S(6,3)=6\cdot 90=540$ maneras diferentes.
- Notemos que, elegida una de las distribuciones del ejemplo anterior, tenemos una forma de hacer corresponder a cada persona una tarea, sin que queden tareas vacantes. En definitiva, estamos estableciendo una función sobreyectiva entre el conjunto de personas y el conjunto de tareas. Siguiendo este razonamiento, ¿cuántas funciones sobreyectivas se pueden establecer entre un dominio de 6 elementos y un codominio de 3 elementos? Calculamos: $3!\cdot S(6,3)=6\cdot 90=540$ funciones sobreyectivas.

6.2 *Fórmula general para el número de Stirling de segunda especie*

En el ejemplo anterior hemos visto cómo calcular el número de funciones sobreyectivas que pueden definirse entre dos conjuntos a partir de los números de Stirling. Aprovecharemos esa idea para deducir una fórmula general, que intuiremos a partir de trabajar con el mismo caso planteado en el ejemplo.

Si tomamos $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ y $B=\{r,s,t\}$, ¿cuántas funciones pueden definirse con dominio A y codominio B? Vemos que a cada elemento del dominio le podemos asociar cualquiera de los elementos del codominio (aún repitiéndolos), y podemos calcular este número como el de arreglos con repetición: $A'^{\# B}_{\# A} = \# B^{\# A} = 3^6 = 729$. Es decir que podemos definir 729 funciones de A en B.

¿Cuántas de ellas serán sobreyectivas?

Restaremos aquellas cuyo recorrido no sea todo B.

De las 729, ¿cuántas tienen por codominio el conjunto $\{r,s\}$? Calculamos análogamente al caso anterior, concluyendo que tendremos $A'^{\#\{r,s\}}_{\# A} = \#\{r,s\}^{\# A} = 2^6 = 64$ funciones con codominio $\{r,s\}$. Podemos extender este resultado a todos los subconjuntos de dos elementos que podamos hacer de B, que serán 3: $\{r,s\}$, $\{s,t\}$ y $\{r,t\}$, también calculando este número como $C_2^{\# B} = C_2^3 = 3$.

En principio podríamos sospechar que habrá $3 \cdot 2^6 = C_2^3 \cdot 2^6 = 192$ funciones con codominio de 2 elementos, pero no es así… Algunas funciones fueron contadas más de una vez, por ejemplo: la función cuyo recorrido es $\{r\}$ se contó al considerar las de codominio $\{r,s\}$ y también al contar las de codominio $\{r,t\}$; lo mismo sucedió con las de recorrido $\{s\}$ y $\{t\}$. Por lo tanto, si a las 729 les restamos las 192, debemos volver a sumar las 3 que se habían perdido.

Sinteticemos pues, diciendo que la cantidad de funciones sobreyectivas que pueden establecerse desde un conjunto de 6 elementos a uno de 3 elementos es: $729 - 192 + 3 = 540$ (que, afortunadamente, coincide con lo calculado anteriormente).

Rescribamos este cálculo así:

$$1 \cdot 729 - 3 \cdot 64 + 3 \cdot 1 = C_3^3 \cdot 3^6 - C_2^3 \cdot 2^6 + C_1^3 \cdot 1^6 =$$

$$(-1)^{3-3} C_3^3 \cdot 3^6 + (-1)^{3-2} C_2^3 \cdot 2^6 + (-1)^{3-1} C_1^3 \cdot 1^6 = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{3-i} \cdot C_i^3 \cdot i^6$$

Teniendo en cuenta lo razonado en el ejemplo anterior, que el valor 540 pudo obtenerse como $3!\,S(6,3)$, basta igualar las expresiones para deducir que $S(6,3) = \dfrac{1}{3!} \sum_{i=1}^{3} (-1)^{3-i} \cdot C_i^3 \cdot i^6$.

Generalizando, obtenemos una fórmula para calcular los números de Stirling de segunda especie: $\boxed{S(m,n) = \dfrac{1}{n!} \cdot \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \cdot C_i^n \cdot i^m}$

Obsérvese que la primera fórmula que encontramos fue una forma de cálculo por recurrencia, y ésta es una fórmula general.

7 Ejercicios

(1) Los automóviles Buick se fabrican en 4 modelos, 12 colores, 3 tamaños de motor y 2 tipos de transmisión.

a) ¿Cuántos Buick distintos pueden fabricarse?

b) Si uno de los colores disponibles es el azul, ¿cuántos Buick azules diferentes se pueden fabricar?

(2)

a) El consejo directivo de una empresa farmacéutica tiene 10 miembros. Se ha programado una próxima reunión de accionistas para aprobar una nueva lista de ejecutivos (elegidos entre los diez miembros del consejo). ¿Cuántas listas diferentes, formadas por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, puede presentar el consejo a los accionistas para su aprobación?

b) Tres miembros del consejo de directores (de la parte anterior) son médicos. ¿Cuántas listas de la parte anterior tienen

i) un médico nominado para la presidencia?

ii) exactamente un médico en la lista?

iii) al menos un médico en la lista?

(3) Luis y Mario juegan un torneo de tenis. El tenista que gane dos partidas consecutivas o triunfe en tres, gana el torneo. ¿Cuáles son los resultados posibles de la competencia?

(4) En un torneo de fútbol, participan 10 equipos. Cada uno juega con los demás equipos dos veces. ¿Cuántos partidos se juegan?

(5) De la ciudad A a la ciudad B hay cinco caminos, y de la ciudad B a la C hay tres caminos.

a) ¿De cuántas maneras se puede ir de A a C pasando por B?

b) ¿De cuántas maneras se puede hacer el trayecto: A-B-C-B-A?

c) ¿De cuántas maneras se puede hacer el trayecto: A-B-C-B-A si la ruta de regreso B-A no puede ser la misma que la elegida para ir de A a B?

(6) Un sábado, cuando iban de compras, Juana y Teresa vieron a dos hombres alejarse en automóvil de la fachada de una joyería, justo antes de que sonara la alarma contra

robos. Aunque todo ocurrió muy rápido, cuando fueron interrogadas las dos jóvenes, pudieron dar a la policía la siguiente información acerca de la placa (que constaba de dos letras seguidas de cuatro dígitos) del automóvil que huyó. Teresa estaba segura de que la segunda letra de la placa era una O o una Q, y que el último dígito era un 3 o un 8. Juana dijo que la primera letra de la placa era una C o una G y que el primer dígito era definitivamente un 7. ¿Cuántas placas diferentes tendrá que verificar la policía?

(7) Matías trabaja como operador en computación en una pequeña universidad. Una tarde, él ve que durante el día se han enviado 12 programas para su procesamiento por lotes. ¿De cuántas formas puede ordenar Matías el procesamiento de estos programas si: (a) no existen restricciones? (b) él considera que cuatro programas tienen prioridad sobre los otros ocho y desea procesarlos antes? (c) primero separa los programas en los cuatro de máxima prioridad, cinco de menor prioridad y tres de mínima prioridad, y desea procesar los 12 programas de modo que los de máxima prioridad se procesen primero y los tres programas de mínima prioridad se procesen al final?

(8) En una circunferencia se ubican seis puntos. ¿Cuántos segmentos determinan?

(9) Usando letras sin repetir de la palabra MURCIÉLAGO, hallar:

a) de cuántas maneras puede elegirse una consonante y una vocal.
b) cuántas palabras (con o sin sentido) pueden formarse con una consonante y una vocal.
c) cuántas palabras de 5 letras pueden escribirse.
d) cuántas de las anteriores comienzan con M
e) cuántas de las del caso c contienen M
f) cuántas de las de c) comienzan con M y terminan con O
g) en cuántas de c) aparecen juntas M y O
h) en cuántas de c) aparecen juntas M, O y U
i) en cuántas de c) aparece el vocablo MOU

(10) ¿De cuántos modos se pueden disponer 10 libros en un estante, si 4 de ellos ocupan lugares fijos aunque intercambiables entre sí?

(11) Se dispone de 4 banderines triangulares de diferente color y de 3 juegos iguales compuestos cada uno por 9 banderas rectangulares distintas; se efectúan señales izando simultáneamente un banderín triangular seguido de 0, 1, 2 o 3 banderas rectangulares.

a) ¿Cuántas señales diferentes pueden hacerse?

b) desde el punto de vista de la cantidad de señales, ¿qué es más conveniente perder: 3 banderas del mismo color, o dos juegos completos de banderas rectangulares?

(12)

a) ¿Cuántos números de 5 cifras sin repetir pueden escribirse con los dígitos?

b) ¿Cuántos de ellos comienzan con 2?

c) ¿en cuántos de los de b) ocupa el 5 el tercer lugar?

d) ¿cuántos son menores que 90000?

e) ¿cuántos son menores que 89763?

(13) Hallar cuántos productos distintos pueden formarse con 5 factores sin repetir elegidos entre los elementos de los conjuntos:

a) $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 11\}$

(14) ¿De cuántas maneras pueden ser ordenadas 10 pruebas de examen de modo que la mejor y la peor nunca están juntas? ¿En cuántos de los casos anteriores hay 4 pruebas interpuestas entre la mejor y la peor?

(15) Hallar la suma de todos los números que se pueden obtener permutando las cifras del número 123456.

(16) Hallar la suma de todos los números mayores de 10000 que se pueden formar utilizando las cifras 0, 2, 4, 6, 8 sin que ninguna se repita.

(17) ¿De cuántas maneras se pueden repartir 7 juguetes distintos entre 4 niños, de modo que a cada niño le corresponda un juguete por lo menos?

(18) Un pintor dispone de diez colores distintos y desea mezclar cinco de ellos en igual cantidad.

a) ¿Cuántas mezclas distintas se pueden formar?

b) ¿Cuántas mezclas se pueden hacer si deben estar dos colores de esos diez?

c) ¿Cuántas mezclas se pueden hacer si no deben estar tres de los diez?

d) ¿Cuántas mezclas se pueden hacer si se cumplen (b) y (c) a la vez?

(19) Ocho estudiantes disponen de tres computadoras para realizar unos trabajos. El profesor les comunica que en la máquina Nº 1 sólo pueden trabajar tres estudiantes, en la Nº 2 otros tres estudiantes, y con la Nº 3, solamente pueden trabajar dos estudiantes. ¿De cuántas maneras distintas pueden distribuirse los ocho estudiantes?

(20) Halla el número de rectas que pasan por cuatro puntos del plano no alineados 3 a 3.

(21) ¿Cuántas diagonales tiene un dodecágono? ¿y un polígono de n lados?

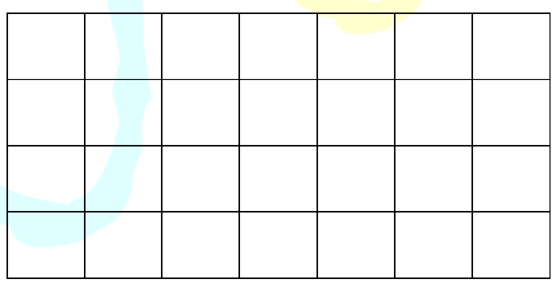
(22) ¿Qué polígono tiene el mismo número de diagonales que de lados?

(23) Cinco políticos se encuentran en una fiesta. ¿Cuántos saludos de mano se intercambian si cada uno estrecha la mano de los demás sólo una vez?

(24) ¿Cuántos números mayores que 1.000.000 pueden escribirse utilizando las cifras 0, 4, 4, 5, 5, 5, 7?

(25) La imagen corresponde al plano de una ciudad, en la cual se desea ir desde la esquina A hasta la esquina B. ¿De cuántas maneras puede hacerse ese recorrido, de modo que nunca se retroceda?

B



A

(26) ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse seis personas alrededor de una mesa redonda? (Nota: dos disposiciones se consideran iguales cuando una puede ser obtenida de la otra a partir de una rotación.)

(27) ¿De cuántas formas es posible distribuir 10 monedas (idénticas) entre cinco niños si (a) no hay restricciones? (b) cada niño recibe al menos una moneda? (c) el niño mayor recibe al menos dos monedas?

(28) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir ocho bolas blancas idénticas en cuatro recipientes distintos de modo que (a) ningún recipiente quede vacío? (b) el cuarto recipiente contenga un número impar de bolas?

(29) Una moneda se lanza 60 veces, dando como resultado 45 caras y 15 cruces. ¿De cuántas maneras podría haber ocurrido esto de modo que no hubiera cruces consecutivas?

(30) ¿Cuántas veces debemos tirar un sólo dado para asegurarnos de obtener el mismo número…

a) al menos dos veces?

b) al menos tres veces?

c) al menos n veces, para $n \geq 4$?

(31) Un auditorio tiene capacidad para 800 personas. ¿Cuántos asientos deben ocuparse para garantizar que al menos dos personas sentadas en el auditorio tienen las mismas iniciales del nombre y del primer apellido?

(32) Supongamos que tenemos siete piedras de diferente color, y cuatro recipientes numerados I, II, III y IV.

a) ¿De cuántas formas podemos distribuir las piedras de modo que ningún recipiente quede vacío?

b) En esta colección de siete piedras de colores diferentes, una de ellas es azul. ¿De cuántas formas podemos distribuir las piedras de modo que ningún recipiente quede vacío y que la piedra azul quede en el recipiente II?

c) Si eliminamos los números de los recipientes de modo que ya no podamos distinguirlos, ¿de cuántas formas podemos distribuir las siete piedras de color entre los cuatro recipientes idénticos, de modo que alguno o algunos de ellos puedan quedar vacíos?

(33) Como sus padres trabajan, Tomás, Eduardo y Carlos deben encargarse de las diez tareas semanales de la casa.

a) ¿De cuántas maneras pueden dividirse las tareas de tal manera que cada uno sea responsable de al menos una de ellas?

b) ¿De cuántas maneras pueden asignarse las tareas si Tomás, por ser el mayor, debe cortar el césped (una de las diez tareas semanales) y a ninguno se le permite estar ocioso?

(34) La señora Báez tiene cinco hijos (Miguel, Ricardo, David, Enrique y Donaldo) a quienes les gusta leer libros de deportes. Como se acerca la Navidad, ella visita una librería donde encuentra 12 libros diferentes de deportes.

a) ¿De cuántas formas puede seleccionar nueve de estos libros?

b) Después de hacer su compra, ¿de cuántas formas puede distribuir los libros entre sus hijos de modo que cada uno de ellos reciba al menos un libro?

c) Dos de los nueve libros que la señora Báez eligió son de baloncesto, el deporte favorito de Donaldo. ¿De cuántas formas puede ella distribuir los libros entre sus hijos para que Donaldo obtenga al menos ambos libros de baloncesto?

Bibliografía

Grimaldi, Ralph (1997). *Matemáticas discreta y combinatoria: Una introducción con aplicaciones*. México: Pearson Educación.

Osín, Luis (1966). *Introducción al análisis matemático.* Buenos Aires: Kapelusz.